# 令和６年度広島大学理学部

# 数学科

# 第３年次編入学試験学力検査問題

## 筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

令和5年9月1日
自　9時00分
至 12時00分

### 答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が計**5問**ある。総ページは，表紙を入れて**6**ページである。

2　解答用紙は，**5枚**ある。解答はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に**2枚**ある。

4　受験番号は，すべての解答用紙と下書き用紙の所定の欄に必ず記入すること。

5　配付した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] 以下の問いに答えよ。

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 2z = 0 \right\}$$

の，標準内積に関する正規直交基底を一組与えよ。

(3) 行列

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し，$B\mathbf{x} = \lambda C\mathbf{x}$ をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ および $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の組をすべて求めよ。

［2］ $x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\theta=\tan^{-1}x$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 $x>0$ に対し，不等式

$$x-\frac{x^3}{3}<\tan^{-1}x<x$$

を示せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)$ を求めよ。

[3] 実数 $a \geq -3$ に対し，行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ -5 & -a & 5 \end{pmatrix}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ。

(2) $A$ が三つの異なる固有値を持つための $a$ に対する条件を求めよ。

(3) $a$ が (2) の条件を満たすとき，$A$ の各固有値に対する固有ベクトルをそれぞれ一つずつ与えよ。

(4) $a = -1$ とする。$\left\{A^n \mathbf{v}\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するような $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ。

［4］ 2 変数関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)\log(x^2 + y^2) & \bigl((x,y) \neq (0,0)\bigr) \\ 0 & \bigl((x,y) = (0,0)\bigr) \end{cases}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ における $f$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ および 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ。

(2) 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上で連続であるか否かを，理由とともに述べよ。

[redacted]

[5] $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ とする。正の整数 $n$ に対し，連続関数 $f_n : I \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x^n}$$

[redacted]

により定める。任意の $x \in I$ および任意の正の整数 $n$ に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{2}{n}$$

が成り立つことを示せ。