令和5年度　第3年次編入学試験　筆記試験問題

実施期日　：　令和4年6月18日（土）
試験時間　：　9時30分～12時00分

注意事項

1　この問題冊子には，
微分積分，線形代数，確率・統計，プログラミング（C言語）の範囲の問題が **5 問**あります．総ページは **11 ページ** です．

2　解答用紙は **5 枚** (表面) あります．**解答**はすべて解答用紙の所定の場所に記入しなさい．**裏面は記入してはいけません．**

3　解答は，特に指定がある場合を除き，結果だけでなく過程も記入しなさい．

4　**受験番号**は，すべての解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい．解答用紙は持ち帰ってはいけません．

[1]　以下の問いに答えよ.

i. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-8y=x+1$$

ii. 行列 $A=\begin{bmatrix}-a & -b\\ b & -a\end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，a, b は共に 0 でない実数とする.

iii. 確率変数 X は以下の確率密度関数 $f(x)$ をもつ.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

ここで $\lambda\,(>0)$ は任意の定数である．このとき，確率変数 X の期待値 $\mathrm{E}(X)$ および分散 $\mathrm{Var}(X)$ を求めよ.

空　欄

[**2**] 以下の問いに答えよ.

i. 平面 $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)=xy(1-2x-3y)$ について以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満たす点を全て求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

ii. $a>0$ とする. $K=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ とするとき, 以下の広義二重積分の値を求めよ.

$$\iint_K \frac{1}{(1-x^2-y^2)^a}dxdy$$

空　欄

[3] $n \geq 4$ を自然数とし，$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ を線形空間 V の 1 次独立なベクトルとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 3 個のベクトル $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$, $\boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_1}$ は 1 次独立か否かを答えよ．理由も述べよ．

(2) 4 個のベクトル $\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}$, $\boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4}$, $\boldsymbol{a_4} + \boldsymbol{a_1}$ は 1 次独立か否かを答えよ．理由も述べよ．

[redacted]

のスカラー $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して，$\boldsymbol{a_1} + c_1\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_2} + c_2\boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a_n} + c_n\boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ．

(4) 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して，$\boldsymbol{v_i} = -\boldsymbol{a_i} + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k}$ とおく．$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ が 1 次独立であることを示せ．

空　欄

[4] 以下の問いに答えよ．

[redacted]

推定量 $\hat{\theta}$ が $\theta = \mathrm{E}(\hat{\theta})$ を満たすとき，$\hat{\theta}$ は母数 θ の不偏推定量であると言う．

(1) 母平均を μ とし，その推定量を

$$\hat{\mu}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とした．このとき，$\hat{\mu}_n$ が母平均 μ に対する不偏推定量になっていることを示せ．

[redacted]

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu}_n)^2$$

とした．ただし $\hat{\mu}_n$ は (1) で与えられる推定量である．このとき，$\hat{\sigma}_n^2$ が母分散 σ^2 に対する不偏推定量になっているかどうか確認せよ．不偏推定量になっていない場合，不偏推定量にするためには上の推定量をどのように修正すれば良いか示せ．

(3) (1) の推定量の分散 $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_n)$ を求めよ．

(4) (1) に対して，m 個の標本からなる推定量 $\hat{\mu}_m$ を考える．ただし，m は n よりも小さい数とする．このとき，推定量 $\hat{\mu}_n$ と推定量 $\hat{\mu}_m$ は一般的にどちらが良い推定量と言えるか．(3) の結果を考慮して説明せよ．

空　欄

[5]　以下のＣ言語に関する問いに答えよ.

(1) リスト１の関数 f は自然数 n を引数にとり，n の値とそのすべての正の約数を表示する関数とする.
リスト１を実行したときの表示内容が出力１となるように関数 f を完成させよ.

(2) リスト２は１から N の整数のうち，自身を除いた正の約数の和が自身と等しくなる数をすべて表示するプログラムとする．出力２はリスト２を実行したときの表示内容である．関数 g を完成させよ.

(3) (2) の関数 g を用いて，１から N の異なる２つの整数の組のうち，自身を除いた正の約数の和が，互いに他方と等しくなるような組をすべて求め，出力３のように表示するプログラムを書け.

リスト１

```
#include <stdio.h>

void f(int n){

}

int main(){
  f(10);
  f(13);
  f(1);
  return 0;
}
```

リスト２

```
#include <stdio.h>
#define N 10000

int g(int n){

}

int main(){
  int i;
  for(i=1;i<=N;i++){
    if(g(i)==i) printf("%d\n",i);
  }
  return 0;
}
```

出力１

```
10: 1, 2, 5, 10
13: 1, 13
1: 1
```

出力２ (N=10000 のとき)

```
6
28
496
8128
```

出力３ (N=10000 のとき)

```
220, 284
1184, 1210
2620, 2924
5020, 5564
6232, 6368
```

空　欄